Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1862,

erstattet

von

G. B. Jacobi,
Direktor der Realschule.

Voran: Eine physikalisch-mathematische Abhandlung von dem Lehrer R. Krusemarck.

Graudenz, 1862.

Druck von Gustav Röthe.

Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1862,

erstattet

von

G. B. Jacobi,
Direktor der Realschule.

Voran: Eine physikalisch-mathematische Abhandlung von dem Lehrer R. Krusemarck.

Graudenz, 1862.

Druck von Gustav Röthe.

Ueber die Schwingungen rechteckiger, elastischer Platten.

Seit Chladni's Entdeckung der Klangfiguren auf elastischen Platten und den dadurch nachgewiesenen Knotenlinien hat man sich vielfach bemüht, auf rein theoretischem Wege die Schwingungen solcher Platten zu bestimmen, ist aber bis jetzt nur bei kreisrunden Scheiben zum Ziele gelangt. Bei anders geformten, namentlich bei rechteckigen Platten, auf denen sich gerade die interessantesten und mannigfaltigsten Klangfiguren bilden, ist man auf experimentelle Untersuchungen beschränkt geblieben. Die allgemeine Bestimmung der akustischen Schwingungen rechteckiger Platten auf mathematischem Wege bildet den Gegenstand der nachfolgenden Abhandlung.

Die Bestimmungsgleichungen der Schwingungen beliebiger Platten hat Kirchhoff in seiner Abhandlung „Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe"*) aufgestellt. In der Herleitung dieser Gleichungen aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen fester elastischer Körper wird durchweg der Coefficient der normalen Ausdehnung als unendlich klein gegen alle übrigen Ausdehnungscoefficienten vernachlässigt. Man gelangt dadurch zu dem Schlusse, dass die Kräfte, welche die Schwingungen veranlassen, selbst von der normalen Ausdehnung unabhängig sein müssen. Damit die Vernachlässigung der erwähnten Coefficienten statthaft erscheine, wird angenommen, dass die Platte sehr dünn und der Ausdehnungscoefficient sehr klein im Vergleich mit der Dicke der Platte, also überhaupt eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung sei. Wie dünn aber eine akustische Platte auch gearbeitet werden mag, so ist ihr Durchmesser doch immer eine Grösse, welche mit den Verschiebungen der einzelnen Massentheilchen während des Tönens nicht in dieselbe Ordnung gebracht werden kann; oder mit anderen Worten, wie gering auch die Dicke der Platte angenommen wird, als *sehr klein* in dem Sinne, welchen dieser Ausdruck in der Akustik hat, kann man sie nicht ansehen. Obiger Schluss kann hiernach nicht als streng genug gerechtfertigt erscheinen, um darauf die Vibrationsgleichungen für elastische Platten zu begründen. Gleichwohl ist die Thatsache, dass eben die elastischen Kräfte von der normalen Ausdehnung unabhängig sind, ohne Zweifel vollkommen richtig, nur muss man die Gründe für ihre Richtigkeit aus einer anderen Quelle schöpfen.

*) Crelle's Journal für Mathematik, Band XL.

Man braucht zu diesem Zweck nur auf das bekannte Princip der Coexistenz sehr kleiner Bewegungen zurückzugehen, nach welchem z. B. bei elastischen Stäben und Saiten die Longitudinalschwingungen mit den Transversalschwingungen coexistiren, ohne dieselben zu modificiren. Bei elastischen Platten würden die normalen Ausdehnungen, wenn sie zur Geltung kämen, zu einer besonderen Gattung von tonerzeugenden Schwingungen Veranlassung geben, welche auf die in Rede stehenden Querschwingungen keinen Einfluss haben. Drückt man die Unabhängigkeit beider Schwingungsarten von einander mathematisch aus, so ergiebt sich dieselbe Thatsache, wie sie oben angeführt wurde.

Wenn man das erwähnte Princip mit den beiden Bernoulli'schen Axiomen, welche weiter unten besprochen werden, verbindet, so braucht man die normale Ausdehnung nur an den Stellen zu vernachlässigen, wo sie mit Grössen multiplicirt wird, welche in Wirklichkeit als *sehr klein* zur Geltung gebracht werden müssen, und darf sie an einer Stelle, wo ihr Vorhandensein von wesentlichem Nutzen ist, unverändert beibehalten. Hierauf lässt sich, wie aus dem Folgenden erhellen wird, ein neues, einfacheres Verfahren gründen, die allgemeinen Bewegungsgleichungen für dünne Platten zu transformiren.

Erster Theil.

Allgemeine Transformationen.

§. 1. Bezeichnet man mit x, y, z, die Coordinaten eines Punctes der Masse eines homogenen, festen, elastischen Körpers im Gleichgewichtszustande, und mit ξ, η, ζ die Verschiebungen, welche dieser Punct längs der drei Coordinatenaxen erfährt, wenn das innere Gleichgewicht gestört wird, so werden die durch diese Störung verursachten akustischen Schwingungen durch die Gleichung:

$$\iiint\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,\delta\xi+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\delta\eta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right)\partial x\,\partial y\,\partial z$$
$$=K\delta\iiint\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$$
$$\left.+G\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right]\partial x\,\partial y\,\partial z$$

definirt, wobei G eine wesentlich positive, K eine wesentlich negative Constante bezeichnet, und die dreifache Integration sich über das ganze Volumen des Körpers erstreckt.*)

Bei der Behandlung sehr dünner Platten, welche von zwei parallelen krummen Flächen und einem auf denselben senkrecht stehenden cylindrischen Rande von beliebiger Form begrenzt werden, stützt man sich auf zwei Axiome, welche zuerst Jacob Bernoulli aufgestellt hat, die aber später nach Poisson's Vorgange allgemein angenommen sind.

---

*) Vgl. §. 28 meiner Abhandlung: „Principien der Vibrationstheorie" im hiesigen Schulprogramm von 1858.

Nennt man *Mittelfläche* diejenige krumme Fläche, welche von beiden Seitenflächen überall gleich weit absteht, so sprechen sich die beiden Bernoulli'schen Axiome folgendermassen aus:

I. Die Mittelfläche erleidet während beliebiger sehr kleiner Verbiegungen der Platte nur eine Verbiegung, aber keine Ausdehnung oder Zusammenziehung.

II. Jede, im Innern der Platte gezogene gerade Linie, welche im Gleichgewichtszustande auf der Mittelfläche normal stand, bleibt auch nach erfolgter Verbiegung der Platte gerade und auf der Mittelfläche normal.

Als drittes Axiom tritt zu diesen das oben besprochene Princip:

III. Die elastischen Kräfte, welche die Querschwingungen verursachen, sind überall von der normalen Ausdehnung der Platte unabhängig.

§. 2. Wir betrachten nur planparallele, d. h. solche Platten, deren Grenzflächen im Gleichgewichtszustande Ebenen sind. Bei solchen Platten ist auch die Mittelfläche ursprünglich eine Ebene, die wir zur Ebene der x, y nehmen wollen. Es sei nun im ursprünglichen Gleichgewichtszustande m irgend ein der Platte angehöriger Punct, und m_0 derjenige Punct, in welchem die Mittelfläche von der durch den Punct m gezogenen Normale getroffen wird. Der Punct m habe ursprünglich die Coordinaten x, y, z. Die Coordinaten von m_0 sind dann x, y, o, und z ist der Abstand des Punctes m von m_0. Durch die Biegung der Platte gelangt der Punct m an eine Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ und der Punct m_0 an eine Stelle $x+\xi_0$, $y+\eta_0$, ζ_0, so dass also ξ, η, ζ; ξ_0, η_0, ζ_0 die Verschiebungen vorstellen, welche beide Puncte längs der Axen erfahren. Der Abstand des Punctes m von m_0 wird nach erfolgter Biegung einen von z verschiedenen Längenwerth z' haben, aber nach dem zweiten Axiom wird z', ebenso wie z, auf der Mittelfläche normal stehen. Die Projectionen von z' auf die Axen sind:

$$\xi - \xi_0 = z' \cos(x,z');\ \eta - \eta_0 = z' \cos(y,z');\ \zeta - \zeta_0 = z' \cos(z,z')$$

Hierin sind ξ_0, η_0 sehr kleine Grössen zweiter Ordnung; denn sie sind die Projectionen der sehr kleinen Strecke, welche der Punct m_0 während der Biegung beschreibt, auf die Axen x, y, also gleich dieser sehr kleinen Strecke selbst, multiplicirt mit den Cosinus von Winkeln, welche sich nur sehr wenig von $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Man kann folglich die Grössen ξ_0, η_0 ohne Weiteres gegen ξ, η vernachlässigen. Die Verschiebung ζ_0 dagegen ist nur von der ersten Ordnung und stellt die Schwingungsordinate der ganzen Platte vor.

§. 3. Was die Cosinus der Winkel (x,z'), (y,z'), (z,z') anlangt, so ist, wenn man für einen Augenblick:

$$x_1 = x + \xi_0;\ y_1 = y + \eta_0;\ \Delta = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y_1}\right)^2}$$

setzt:

$$\cos(x,z') = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \zeta_0}{\partial x_1};\ \cos(y,z') = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \zeta_0}{\partial y_1};\ \cos(z,z') = \frac{1}{\Delta},$$

und wenn man die Quadrate der sehr kleinen Grössen $\frac{\partial \zeta_0}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \zeta_0}{\partial y_1}$ gegen ihre erste Potenz und nachher ξ_0, η_0 resp. gegen x,y vernachlässigt, also x anstatt x_1 und y anstatt y_1 schreibt:

$$\cos(x,z') = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial x};\ \cos(y,z') = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial y};\ \cos(z,z') = 1.$$

Bezeichnet man endlich mit ς den Coefficienten der Ausdehnung, welche die Länge z durch die Biegung erfährt, so ist:

$$z' - z = z.\,\varsigma.$$

Die Grösse ς ist hierbei offenbar ebenfalls sehr klein, liefert also da, wo sie mit anderen sehr kleinen Grössen multiplicirt wird, sehr kleine Grössen höherer Ordnung, die man vernachlässigen darf. Dadurch reducirt sich in den Werthen von ξ und η das z' auf z, während in dem Werthe von $\zeta - \zeta_0$, wo z' nur mit der Einheit multiplicirt ist, ς nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden darf. Man hat hiernach:

$$(1)\ \xi = -z\,\frac{\partial \zeta_0}{\partial x};\ \eta = -z\,\frac{\partial \zeta_0}{\partial y};\ \zeta = \zeta_0 + z\,(1 + \varsigma),$$

woraus hervorgeht, dass die Verschiebungen ξ, η von dem normalen Ausdehnungscoefficienten ς unabhängig sind, dieser also nur in ζ vorkommen kann.

§. 4. Das dritte der oben angeführten Axiome fordert nun, dass die in Bezug auf ς genommene Variation des zweiten Theils der allgemeinen Bewegungsgleichung verschwinde. Deutet man diese Variation durch das Zeichen D an und variirt unter dem Integralzeichen, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z}\,D\,\frac{\partial \zeta}{\partial z} + G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) D\,\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) D\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) D\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

eben weil ξ und η in Bezug auf die durch das Zeichen D angedeutete Variation constant sind. Da ferner die Coordinaten x, y, z von einander ganz unabhängig sind, und die oben erhaltene Gleichung für jedes beliebige Werthsystem x, y, z Statt finden muss, so muss man auch die drei Variationen $D\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $D\frac{\partial \zeta}{\partial y}$, $D\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ als völlig unabhängig von einander ansehen. Es ist demnach obige Gleichung nur dadurch möglich, dass die Coefficienten dieser drei Variationen gesondert verschwinden. Hieraus entspringen die Gleichungen:

$$(2)\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} + G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = 0;$$

$$(3)\ \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

§. 5. Die in den Gleichungen (1) vorkommende Verschiebung ζ des Punctes m_0 ist für jeden beliebigen auf derselben Normale liegenden Punct m, also für jedes beliebige z dieselbe, folglich von z unabhängig. Man erhält daher durch Differentiation:

$$(4)\ \begin{cases} \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial z} = 0;\ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y \partial z} = 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z\,\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2};\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z\,\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2};\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -z\,\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Die Gleichung (2) giebt für $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ den Werth:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{G}{1+G}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Setzt man diesen Werth in den zweiten Theil der allgemeinen Bewegungsgleichung ein und benutzt die Gleichungen (3) (4), so reducirt sich das elastische Moment auf:

$$K\,\delta \iiint \left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{G}{1+G}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial y}\right)^2\right] z^2\,\partial x\,\partial y\,\partial z.$$

Die Gleichungen (3) geben in Verbindung mit denen (1.):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta_0}{\partial x};\ \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta_0}{\partial y};\ \frac{\partial\varsigma}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial\varsigma}{\partial y} = 0,$$

woraus hervorgeht, dass ς von x und y unabhängig, also blos Function von z ist.

§. 6. Der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta$$

verwandelt sich durch Anwendung der Relationen (1) in:

$$z^2\left(\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial t^2}\,\delta\,\frac{\partial\zeta_0}{\partial x} + \frac{\partial^3\zeta_0}{\partial y\partial t^2}\,\delta\,\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2} + z\,\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t^2}\right)(\delta\zeta_0 + z\delta\varsigma).$$

Hierin ist der mit z^2 multiplicirte Theil von ς uuabhängig. Damit dasselbe, dem dritten Axiome gemäss, auch von den übrigen Gliedern gelte, muss man annehmen, dass für jeden beliebigen Werth des ς sowohl die virtuelle Verlegung, welche durch das Zeichen δ angedeutet wird, als auch die beschleunigende Kraft denselben Werth habe. Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, dass man setze:

$$\frac{\partial^2\varsigma}{\partial t^2} = 0;\ \delta\varsigma = 0.$$

Nach diesen Erörterungen ist es an der Zeit, auf die geringe Dicke der Platte, wie sie das in Rede stehende Phänomen veraussetzt, Rücksicht zu nehmen. Wir sagten oben, dass diese Dicke, wie gering man sie auch annehmen mag, doch niemals als so gering angenommen werden dürfe, dass man sie mit den übrigen, als specifisch *sehr klein* zur Geltung kommenden Grössen in einerlei Ordnung bringen könne. Wo aber derartige Grössen nicht in Betracht kommen, sondern wo die Dicke der Platte nur mit sich selbst und mit ihren eignen Potenzen in Vergleich gebracht wird, gelten dieselben Schlüsse, wie überhaupt von sehr kleinen Grössen, dass man nämlich höhere Potenzen derselben gegen die erste vernachlässigen kann. Diesen Schluss machen wir auch in dem vorliegenden Falle. Wir nehmen also eine elastische Platte an, deren Dicke so gering ist, dass man ohne merklichen Fehler ihr Quadrat gegen ihre erste Potenz vernachlässigen darf. Dasselbe gilt dann a fortiori auch von z und es verschwindet in obigem Ausdrucke das mit z^2 multiplicirte Glied, so dass der ganze Ausdruck sich einfach auf $\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial t^2}\,\delta\zeta_0$ reducirt.

Die Integrationen nach z lassen sich hierauf überall ausführen und erstrecken sich, wenn $2\,\tau$ die Dicke der Platte bezeichnet, von $-\,\tau$ bis $+\,\tau$. Schreibt man darauf in üblicher Weise z anstatt ζ_0, was erlaubt ist, da der Buchstabe z jetzt nirgends mehr vorkommt, so erhält man:

$$(5) \quad \iint \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\, \delta z\, \partial x\, \partial y$$

$$= \frac{2}{3} K \tau^2 \delta \iint \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{G}{1+G}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 \right] \partial x\, \partial y,$$

wobei die Integration sich über den ganzen Flächenraum der Mittelfläche erstreckt.

§. 6. Wenn man die durch das Zeichen δ angedeutete Variation im zweiten Theile dieser Gleichung unter dem Integralzeichen ausführt und darauf bald nach x, bald nach y theilweise integrirt, so zerfällt der ganze Ausdruck in ein Doppelintegral, welches sich über den ganzen Flächenraum der Mittelfläche erstreckt, und zwei einfache Integrale, welche sich über die ganze Contour dieser Fläche erstrecken. Das Doppelintegral muss demjenigen gleichgesetzt werden, welches den ersten Theil der Gleichung (5) bildet, und dieses ist nur dadurch möglich, dass die Coefficienten der einzigen darin vorkommenden, wesentlich willkürlichen Variation δz einander gleich werden. Man erhält dadurch die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(I.)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = 0,$$

welche für alle Punkte der Mittelfläche erfüllt werden muss. Die einfachen Integrale müssen zusammen verschwinden, woraus die auf alle Puncte der Contour sich beziehende Gleichung:

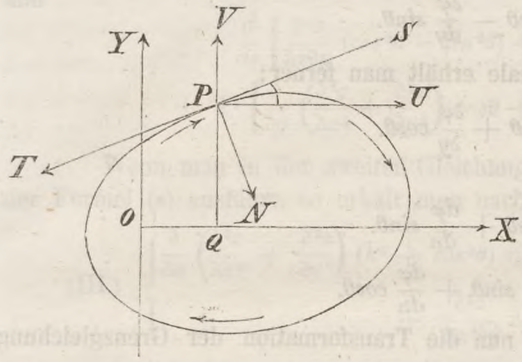
$$\int \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (k^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta z}{\partial y} - k^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \delta z \right\} dx$$
$$+ \int \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (k^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \delta z}{\partial y} - k^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \delta z \right\} dy$$
$$= 0$$

entspringt.

Es sind hierbei der Kürze wegen die Grössen: $\frac{4}{3} K \varsigma^2 \frac{1+2G}{1+G}, \frac{1+2G}{1+G}$ bezüglich mit $-c^2$, k^2 bezeichnet worden, was erlaubt ist, da, wie oben bemerkt wurde, K eine negative, G eine positive Constante bezeichnet.

Die beiden einfachen Integrale, welche in der eben angeführten Grenzgleichung vorkommen, lassen sich unter ein gemeinsames, auf das Bogenelement ds der Contour bezügliches Integralzeichen bringen. Kirchhoff verrichtet diese Transformation mit Hülfe des Winkels, den die nach innen gerichtete Normale der Contour mit der positiven x-Axe bildet. Für die nachfolgende Betrachtung rechteckiger Platten scheint es zweckmässiger, statt dessen den Richtungswinkel der Tangente in Rechnung zu bringen. Mit Hülfe dieses Winkels werde ich die erwähnte Transformation ausführen.

§. 7. Denkt man durch einen Punct P einer Curve irgend eine Secante und zwei Parallele zu den Coordinatenaxen gezogen, so hat man jederzeit diejenigen Richtungen dieser beiden Parallelen als zusammengehörig zu betrachten, welche mit jener Secante Complementarwinkel bilden. Bezeichnet also θ den Winkel zwischen der Secante und der positiven x-Axe, oder der ihr gleichgerichteten Parallelen, so sind $\cos\theta$ und $\sin\theta$ die Cosinus



der beiden zusammengehörigen Richtungswinkel der Secante. Wir wollen die positiven Richtungen in der beistehenden Figur durch Pfeilspitzen andeuten und lassen jene Secante der Reihe nach bald mit der Tangante, bald mit der Normale zusammenfallen. Der gebogene Pfeil an der Curve selbst deutet deren positive Richtung an. Der laufende Werth der Curve sei s; die erwähnten Parallelen seien PU und PV; ST sei die Tangente, PN die Normale. Die positive Richtung des Curvenelements ds fällt mit der, von P nach S hin sich erstreckenden Tangentenrichtung zusammen; die zugehörigen Coordinatenrichtungen sind folglich PU und PV, beide von P aus nach den Pfeilspitzen hin. Ist daher SPU der Winkel θ, so werden die Cosinus der beiden Richtungswinkel des ds ausgedrückt durch:

$$(\theta)\qquad \frac{dx}{ds} = cos\theta;\ \frac{dy}{ds} = sin\theta.$$

Die in diesen Formeln berücksichtigte Tangentenrichtung ist aber nicht die positive, sondern man muss vielmehr diejenige Richtung ST als die positive ansehen, welche, wenn man den Berührungspunct, ihrem Sinne folgend, längs der Curve fortbewegt, den Winkel θ wachsen macht, also, wie es die Figur zeigt, von P aus nach der Pfeilspitze bei T hin, der Richtung der Curve selbst gerade entgegengesetzt.

Der Winkel, den diese Richtung PT mit der positiven x-Axe bildet, ist gleich $\pi-\theta=TPU$ und sein Complement ist gleich $\frac{\pi}{2}-(\pi-\theta)=-(\frac{\pi}{2}-\theta)$, also negativ. Die Cosinus dieser beiden Winkel sind folglich gleich: $-cos\theta$, $+sin\theta$.

Endlich betrachten wir noch die zur positiven Tangente gehörige Normale und bezeichnen mit η den Winkel, den dieselbe mit der positiven x-Axe bildet. Mit der zugehörigen Ordinate muss diese Normale den Winkel $\frac{\pi}{2}-\eta$ bilden, und damit sie auf der Tangente senkrecht stehe, muss man haben:

$$-cos\theta cos\eta + sin\theta sin\eta=0,$$

woraus folgt: $tng\eta=ctg\theta$, mithin $\eta=\frac{\pi}{2}-\theta$. Dieser Winkel ist aber gleich NPU; folglich gehört zur erwähnten Tangentenrichtung die in das Innere der Curve, also von P aus nach der Spitze N hin gerichtete Normale, welche zur Tangente so liegt, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe. Die Richtung dieser Normale bezeichnen wir mit n, die der Tangente mit t, so ist, da die Richtung t der Curvenrichtung s entgegengesetzt ist, $dt = - ds$.

Differentiirt man nun eine beliebige Function φ von x und y nach t, so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}sin\theta.$$

Differentiirt man folglich dieselbe Function nach der Richtung der Curve selbst, so ergiebt sich:

$$(s)\quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, cos\theta - \frac{\partial\varphi}{dy}\, sin\theta.$$

Durch Differentiation nach der Normale erhält man ferner:

$$(n)\quad \frac{d\varphi}{dn} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, cos\theta.$$

Hieraus folgt:

$$(x)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{ds}\, cos\theta + \frac{d\varphi}{dn}\, sin\theta.$$

$$(y)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d\varphi}{ds}\, sin\theta + \frac{d\varphi}{dn}\, cos\theta.$$

Vermöge dieser Formeln wollen wir nun die Transformation der Grenzgleichung vollenden.

§. 8. Setzt man zunächst für dx und dy ihre Werthe: $ds\, cos\theta$, $ds\, sin\theta$, so nimmt jene Gleichung, nach Vereinigung beider Theile, folgende Form an:

$$\int \Big\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\, cos\theta + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) sin\theta$$
$$+ \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (k^2-1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta z}{\partial y}\, cos\theta + \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (k^2-1) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \delta z}{\partial x}\, sin\theta$$
$$- k^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) cos\theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) sin\theta \right] \delta z \Big\} ds$$
$$= 0.$$

Drückt man jetzt die nach x, y genommenen partiellen Derivirten von δz vermöge der Formeln (x) (y) durch die totalen, nach s, n genommenen, aus, so erhält man:

$$\int \Big\{ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (cos^2\theta - sin^2\theta) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) sin\theta\, cos\theta \right] \frac{d\delta z}{ds}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} sin^2\theta + \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y} sin\theta\, cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} cos^2\theta + (k^2-1) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \right] \frac{d\delta z}{dn}$$
$$- k^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) cos\theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) sin\theta \right] \delta z \Big\} ds$$
$$= 0.$$

Die Derivirte $\frac{d\delta z}{ds}$ kann man durch theilweise Integration beseitigen. Dabei verschwindet der aus dem Integralzeichen tretende Ausdruck:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) sin\theta\, cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} (cos^2\theta - sin^2\theta) \right] \delta z,$$

weil die Integration sich längs einer geschlossenen Curve erstreckt. Das Integral selbst enthält nach Ausführung der theilweisen Integration nur noch die beiden Variationen δz und $\delta \frac{dz}{dn}$, welche wesentlich willkürlich und von einander selbst unabhängig sind. Annullirt man daher ihre Coefficienten, so erhält man die beiden Grenzgleichungen:

$$(\text{II.})\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} sin^2\theta + \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y} sin\theta\, cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} cos^2\theta + (k^2-1) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0;$$

und

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\sin\theta\cos\theta\right]$$
$$+ k^2\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\sin\theta\right] = 0.$$

Wenn man in der zweiten Gleichung die auf s bezügliche Differentiation vermöge der Formel (s) ausführt, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

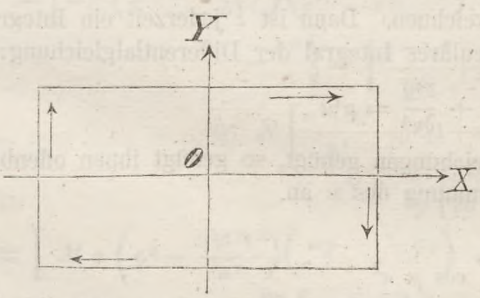
$$\text{(III.)}\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)(k^2 + \cos^2\theta)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)(k^2 + \sin^2\theta)\cos\theta \\ \qquad + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cos 3\theta - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\sin 3\theta = 0. \end{array}\right.$$

Die beiden Gleichungen (II.) und (III.) enhalten die Grenzbedingungen, welche das Integral der partiellen Differentialgleichung (I.) erfüllen muss, damit dadurch die Schwingungen der in Rede stehenden Platten völlig bestimmt werden.

Zweiter Theil.

Ueber die Schwingungen rechteckiger Platten.

§. 9. Wir gehen jetzt zu dem besonderen Falle über, in welchem die Contour der Mittelfläche im Ruhezustande ein Rechteck ist. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Durchschnittspunct der Diagonalen verlegen und die Richtungen der Coordinatenaxen so wählen, dass sie im Ruhezustande den Seiten der Mittelfläche parallel laufen. Die beiden Seiten des Rechtecks seien $2a$ und $2b$; erstere laufe der x-Axe, letztere der y-Axe parallel. Die Gleichungen (II.) (III.) müssen in diesem Falle erfüllt werden für folgende Combinationen von Coordinatenwerthen.



Erstens, bei beliebigen Werthen des x, sowohl für $y = + b$, als auch für $y = - b$, und zweitens, bei beliebigen Werthen des y, sowohl für $x = + a$, als auch für $x = - a$. Für den Werth $y = - b$ ist nun offenbar $\theta = \pi$. Diesen Werth behält θ unverändert für alle x von $+ a$ bis $- a$; wird $x = - a$, so macht die Curve eine Biegung von 90° und bildet nun mit der x-Axe den Winkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ für alle y von $- b$ bis $+ b$. Wird der Werth $y = + b$ erreicht, so macht die Curve eine neue Biegung von 90° und der Winkel θ nimmt wieder um $\frac{\pi}{2}$ ab, wird also gleich Null, und behauptet diesen Werth von $x = - a$ bis $x = + a$. Wird endlich $x = + a$, so erleidet die Curve eine dritte Biegung von 90° und θ nimmt wieder um $\frac{\pi}{2}$ ab, erhält also den Werth $- \frac{\pi}{2}$, den es für alle y von $+ b$ bis $- b$ beibehält.

Für die beiden Werthe $y = \pm b$ ist also, bei beliebigen Werthen des x, stets θ ein ganzes Vielfaches von π, und für $x = \pm a$, bei beliebigen Werthen des y, stets θ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$. Welche Multipla dieses auch sein mögen, so hat stets $cos\theta$ mit $cos 3\theta$ gleiches, und $sin\theta$ mit $sin 3\theta$ entgegengesetztes Zeichen. Geht man folglich mit obigen Werthsystemen in die Gleichungen (II.) (III.) hinein, so reduciren sich dieselben, bei beliebigen Werthen des y, sowohl für $x = + a$, als auch für $x = - a$ auf:

$$k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (k^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial}{\partial x} \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (k^2+1) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = 0,$$

und bei beliebigen Werthen des x, sowohl für $y = + b$, als auch für $y = - b$ auf:

$$k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (k^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial}{\partial y} \left[k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (k^2+1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = 0.$$

Wir wollen der Bequemlichkeit wegen Alles durch k^2 dividiren und $\frac{1}{k^2} = \varkappa^2$ setzen, so dass $\varkappa^2$ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Das Problem, die akustischen Schwingungen rechteckiger Platten zu bestimmen, stellt sich hiernach folgendermassen:

Die partielle Differentialgleichung (I.) so zu integriren, dass zugleich den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (A.) & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-\varkappa^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \\ (B.) & \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+\varkappa^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] = 0. \end{array}\right\} \text{bei beliebigen Werthen des } y \text{ für } x = + a \text{ und für } x = - a,$$

und den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (C.) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (1-\varkappa^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \\ (D.) & \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (1+\varkappa^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = 0. \end{array}\right\} \text{bei beliebigen Werthen des } x \text{ für } y = + b \text{ und für } y = - b$$

Genüge geschieht.

§. 10. Um zunächst die partielle Differentialgleichung (I.) zu integriren, setzen wir:

$$(z) \quad z = u\,(A \cos c\rho^2 t + B \sin c\rho^2 t),$$

worin ρ, A, B drei willkürliche Constante bezeichnen. Dann ist z jederzeit ein Integral der Differentialgleichung (I.), wenn u ein particuläres Integral der Differentialgleichung:

$$(u.) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \rho^4 u$$

vorstellt. Wenn dieses Integral u den Grenzgleichungen genügt, so genügt ihnen offenbar auch z; es kommt folglich Alles auf die Bestimmung des u an.

Man setze nun:

$$u = H\,e^{\nu x} \cos \mu\, x$$

wo H, μ, ν drei Constante bezeichnen. Führt man diesen Werth in die Differentialgleichung (u) ein, so findet man, dass dieselbe erfüllt wird, wenn zwischen den Constanten μ, ν, ρ die Gleichung:

$$\mu^4 - 2\,\mu^2\,\nu^2 + \nu^4 = \rho^4$$

besteht, also für jeden in der Formel:

$$\nu = \pm \sqrt{\mu^2 \pm \rho^2}$$

enthaltenen Werth des μ. Bezeichnen also H, H', K, K' vier willkürliche Constante, so ist auch folgender Ausdruck:

$$\left(H e^{x\sqrt{\mu^2+\rho^2}} + H' e^{-x\sqrt{\mu^2+\rho^2}} + K e^{x\sqrt{\mu^2-\rho^2}} + K' e^{-x\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\right) \cos \mu y$$

ein Integral.

Nun ändert sich aber der erste Theil der Differentialgleichung (u) nicht, wenn man x in $-x$ verwandelt. Es muss folglich auch die Function u selbst von dem Zeichen des x unabhängig sein. Damit diese Bedingung erfüllt werde, muss man: $H'=H$, $K'=K$ setzen. Jenes particuläre Integral wird daher:

$$u_1 = \left[H\left(e^{x\sqrt{\mu^2+\rho^2}} + e^{-x\sqrt{\mu^2+\rho^2}}\right) + K\left(e^{x\sqrt{\mu^2-\rho^2}} + e^{-x\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\right)\right] \cos \mu y$$

Ein zweites particuläres Integral wird, wie man auf dieselbe Art findet:

$$u_2 = \left[M\left(e^{y\sqrt{\lambda^2+\rho^2}} + e^{-y\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}\right) + N\left(e^{y\sqrt{\lambda^2-\rho^2}} + e^{-y\sqrt{\lambda^2-\rho^2}}\right)\right] \cos \lambda x,$$

worin M, N, λ drei neue Constante bezeichnen. Es ist folglich auch die Summe:

$$u = u_1 + u_2$$

ein Integral.

§. 11. Wir wollen nun mit n eine beliebige ganze Zahl bezeichnen und $\lambda = \frac{n\pi}{a}$, $\mu = \frac{n\pi}{b}$ setzen und darauf die Werthe, welche die ersten Theile der beiden Grenzgleichungen ($B.$) ($D.$) erhalten, wenn man für u die Summe $u_1 + u_2$ einführt, durch Differentiation berechnen. Bedient man sich hierbei der Kürze wegen der Bezeichnung:

$$a\alpha = \sqrt{n^2\pi^2 + a^2\rho^2}; \quad a\alpha' = \sqrt{n^2\pi^2 - a^2\rho^2};$$
$$b\beta = \sqrt{n^2\pi^2 + b^2\rho^2}; \quad b\beta' = \sqrt{n^2\pi^2 - b^2\rho^2},$$

so erhält man:

$$(X.) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+\varkappa^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$
$$= \left[H\beta\left(\rho^2 - \frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{b^2}\right)\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right) - K\beta'\left(\rho^2 + \frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{b^2}\right)\left(e^{\beta' x} - e^{-\beta' x}\right)\right] \cos\frac{n\pi}{b}y$$
$$- \frac{n\pi}{a}\Big\{M\left[\frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{a^2} + \rho^2(1+\varkappa^2)\right]\left(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}\right)$$
$$+ N\left[\frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{a^2} - \rho^2(1+\varkappa^2)\right]\left(e^{\alpha' y} + e^{-\alpha' y}\right)\Big\} \sin\frac{n\pi}{a}x;$$

$$(Y.) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+\varkappa^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$
$$= \left[M\alpha\left(\rho^2 - \frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{a^2}\right)\left(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}\right) - N\alpha'\left(\rho^2 + \frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{a^2}\right)\left(e^{\alpha' y} + e^{-\alpha' y}\right)\right] \cos\frac{n\pi}{a}x$$
$$- \frac{n\pi}{b}\Big\{H\left[\frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{b^2} + \rho^2(1+\varkappa^2)\right]\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)$$
$$+ K\left[\frac{n^2\pi^2\varkappa^2}{b^2} - \rho^2(1+\varkappa^2)\right]\left(e^{\beta' x} + e^{-\beta' x}\right)\Big\} \sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Der Ausdruck (X.) reducirt sich, bei beliebigen Werthen des y, für jeden der beiden Werthe: $x = + a$ und $x = - a$ auf seinen ersten, mit $\cos\frac{n\pi}{b}y$ multiplicirten Theil, weil der Factor $\sin\frac{n\pi}{a}x$ des zweiten Theils für beide Werthe verschwindet. Um den Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + \varkappa^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

zu annulliren, braucht man daher nur den Coefficienten von $\cos\frac{n\pi}{b}y$ für $x = + a$, sowie für $x = - a$ gleich Null zu setzen. Der Werth, welchen dieser Coefficient für $x = - a$ annimmt, ist aber genau gleich und entgegengesetzt demjenigen, welchen er für $x = + a$ hat. Man braucht daher, da das Vorzeichen des ganzen Ausdrucks auf sein Verschwinden keinen Einfluss hat, nur den einen Werth $x = a$ zu berücksichtigen.

Auf dieselbe Art überzeugt man sich, dass der Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + \varkappa^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

in erforderlicher Weise annullirt wird, wenn man in dem Ausdrucke (Y.) den Coefficienten von $\cos\frac{n\pi}{a}x$ für den einen Werth $y = b$ gleich Null setzt. Wegen dieser Eigenschaft der Function u kann man zunächst die Grenzbedingungen (B.) (D.) einfach dadurch erfüllen, dass man setzt:

$$H\beta\,(b^2\rho^2 - n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{a\beta} - e^{-a\beta}\right) = K\beta'\,(b^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{a\beta'} - e^{-a\beta'}\right);$$

$$M\alpha\,(a^2\rho^2 - n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{b\alpha} - e^{-b\alpha}\right) = N\alpha'\,(a^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{b\alpha'} - e^{-b\alpha'}\right).$$

Führt man daher zwei neue Constante H_n, K_n durch die Gleichungen:

$$H = \beta'\,(b^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{a\beta'} - e^{-a\beta'}\right) H_n;$$

$$M = \alpha'\,(a^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{b\alpha'} - e^{-b\alpha'}\right) K_n,$$

ein und bedient sich zur Abkürzung der Bezeichnung:

$$P_n(x) = \beta'\,(b^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{a\beta'} - e^{-a\beta'}\right)\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)$$
$$+ \beta\,(b^2\rho^2 - n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{a\beta} - e^{-a\beta}\right)\left(e^{\beta' x} + e^{-\beta' x}\right);$$

$$Q_n(x) = \alpha'\,(a^2\rho^2 + n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{b\alpha'} - e^{-b\alpha'}\right)\left(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}\right)$$
$$+ \alpha\,(a^2\rho^2 - n^2\pi^2\varkappa^2)\left(e^{b\alpha} - e^{-b\alpha}\right)\left(e^{\alpha' x} + e^{-\alpha' x}\right),$$

so ist jeder Ausdruck von der Form:

$$u_n = H_n P_n(x)\cos\frac{n\pi}{b}y + K_n Q_n(y)\cos\frac{n\pi}{a}x,$$

und folglich auch die Summe:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[H_n P_n(x) \cos\frac{n\pi}{b} y + K_n Q_n(y) \cos\frac{n\pi}{a} x \right]$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (I.), welches zugleich den beiden Grenzgleichungen (B.) und (D.) Genüge leistet.

§. 12. Die Constanten H_n und K_n müssen jetzt so bestimmt werden, dass auch den Gleichungen (A.) (C.) Genüge geschieht. Zu diesem Zwecke wollen wir die Function $P_n(x)$ nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ und die Function $Q_n(y)$ nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{\pi y}{b}$ entwickeln. Hierzu dienen die bekannten Formeln:

$$P_n(x) = \frac{1}{2a} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \cos\frac{m\pi}{a} x \int_{-a}^{+a} P_n(\theta) \cos\frac{m\pi}{a} \theta \, d\theta;$$

$$Q_n(y) = \frac{1}{2b} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \cos\frac{m\pi}{b} y \int_{-b}^{+b} Q_n(\theta) \cos\frac{m\pi}{b} \theta \, d\theta.$$

Vermöge der letzten kann man das Integral u auf folgende Form bringen:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Bigg\{ H_n P_n(x) \cos\frac{n\pi}{b} y$$

$$+ \frac{Kn}{2b} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \cos\frac{m\pi}{b} y \cos\frac{n\pi}{a} x \int_{-b}^{+b} Q_n(\theta) \cos\frac{m\pi}{b} \theta \, d\theta \Bigg\}$$

$$= \sum_{n=+\infty}^{n=+\infty} H_n P_n(x) \cos\frac{n\pi}{b} y$$

$$+ \frac{1}{2b} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} K_n \cos\frac{m\pi}{b} y \cos\frac{n\pi}{a} x \int_{-b}^{+b} Q_n(\theta) \cos\frac{m\pi}{b} \theta \, d\theta.$$

Wenn man in der Doppelsumme, welche das zweite Glied dieses Ausdrucks bildet, die Ordnung umkehrt und darauf die Buchstaben m und n mit einander vertauscht, so wird $\cos\frac{n\pi}{b} y$ gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der auf m sich beziehenden Summe, und man kann, nach Herausstellung dieses Factors, das Integral u folgendermassen schreiben:

$$u = \sum_{n=+\infty}^{n=+\infty} \cos\frac{n\pi}{b} y \Bigg\{ H_n P_n(x)$$

$$+ \frac{1}{2b} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} K_m \cos\frac{m\pi}{a} x \int_{-b}^{+b} Q_m(\theta) \cos\frac{n\pi}{b} \theta \, d\theta \Bigg\}.$$

Hätte man statt dessen die erstere der beiden oben angeführten Formeln benutzt, so hätten mutatis mutandis dieselben Schlüsse, wie oben, folgenden Ausdruck für u geliefert:

$$u = \mathbf{S}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos\frac{n\pi}{a}x \left\{ K_n Q_n(y) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a} \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty} H_m \cos\frac{m\pi}{b} y \int_{-a}^{+a} P_m(\theta) \cos\frac{n\pi}{a}\theta\, d\theta \right\},$$

welcher mit dem vorigen vollkommen gleichbedeutend ist. Aus dem ersteren dieser beiden Ausdrücke für u erhält man nun durch Differentiation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \varkappa^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \mathbf{S}_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos\frac{n\pi}{b} y \left\{ H_n \left[P''_n(x) - (1 - \varkappa^2) \frac{n^2\pi^2}{b^2} P_n(x) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2b} \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty} K_m \left[\frac{m^2}{a^2} + (1 - \varkappa^2) \frac{n^2}{b^2} \right] \cos\frac{m\pi}{a} x \int_{-b}^{+b} Q_m(\theta) \cos\frac{n\pi}{b}\theta\, d\theta \right\}$$

worin $P''_n(x)$ die zweite Dirivirte von $P_n(x)$ bezeichnet.

Wenn man diesen Ausdruck bei beliebigen Werthen des y, sowohl für $x = + a$, als auch für $x = - a$ annullirt, so geschieht der Grenzgleichung (A.) Genüge. Man sieht aber auf den ersten Blick, dass die Functionen $P_n(x)$ und $P''_n(x)$ für $x = + a$ und für $x = - a$ genau denselben Werth haben. Ferner ist einleuchtend, dass die auf n bezügliche Summe nicht anders verschwinden kann, als wenn für jeden beliebigen Zahlenwerth des n der Coefficient von $\cos\frac{n\pi}{b} y$ verschwindet. Man genügt folglich der Gleichung (A.) einfach dadurch, dass man für jeden Zahlenwerth des n setzt:

$$[1.] \left\{ \begin{aligned} & 2ba^2 H_n \left[b^2 P''_n(a) - (1 - \varkappa^2)\, n^2\pi^2 P_n(a) \right] \\ & = \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m K_m \left[m^2 b^2 + n^2 a^2\, (1 - \varkappa^2) \right] \int_{-b}^{+b} Q_m(\theta) \cos\frac{n\pi}{b}\theta\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Um endlich die Gleichung (C.) zu erfüllen, bedienen wir uns des zweiten der beiden obigen Ausdrücke für u. Derselbe liefert, wenn man genau die analogen Schlüsse macht, die Gleichung:

$$[2.] \left\{ \begin{aligned} & 2ab^2 K_n \left[a^2 Q''_n(b) - (1 - \varkappa^2)\, n^2\pi^2 Q_n(b) \right] \\ & = \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m H_m \left[m^2 a^2 + n^2 b^2\, (1 - \varkappa^2) \right] \int_{-a}^{+a} P_m(\theta) \cos\frac{n\pi}{b}\theta\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Diese beiden Gleichungen [1.] [2.] enthalten alle Bedingnngen, welche von den Constanten H_n, K_n, ρ für jedes beliebige n erfüllt werden müssen. Eine dieser drei Constanten, gleichviel welche, bleibt hierbei willkürlich, die beiden anderen werden durch die Gleichungen [1.] [2.] als Functionen dieser einen bestimmt.

§. 13. Führt man die Integrationen in Bezug auf θ vermöge der Formel:

$$\int \left(e^{h\theta}+e^{-h\theta}\right) \cos k\theta\, d\theta = \frac{h\left(e^{h\theta}-e^{-h\theta}\right)\cos k\theta + k\left(e^{h\theta}+e^{-k\theta}\right)\sin k\theta}{h^2+k^2}$$

aus und bedient sich der Kürze wegen der Bezeichnungen:

$$p_n = ab\sqrt{n^4\pi^4-b^4\rho^4}\left(e^{a\beta}-e^{-a\beta}\right)\left(e^{a\beta'}-e^{-a\beta'}\right);$$

$$q_n = ab\sqrt{n^4\pi^4-a^4\rho^4}\left(e^{b\alpha}-e^{-b\alpha}\right)\left(e^{b\alpha'}-e^{-b\alpha'}\right),$$

so erhält man ohne Mühe:

$$\int_{-b}^{+b} Q_m(\theta)\cos\frac{n\pi}{b}\theta\, d\theta = 4.(-1)^n ba^2\rho^2\pi^2 \frac{n^2a^2+m^2b^2(1-\varkappa^2)}{(m^2b^2+n^2a^2)^2\pi^4-a^4b^4\rho^4}\, q_m;$$

$$\int_{-a}^{+a} P_m(\theta)\cos\frac{n\pi}{a}\theta\, d\theta = 4.(-1)^n ab^2\rho^2\pi^2 \frac{n^2b^2+m^2a^2(1-\varkappa^2)}{(m^2a^2+n^2b^2)^2\pi^4-a^4b^4\rho^4}\, p_m.$$

Ehe wir diese Werthe in die Grenzgleichungen einführen, wollen wir für jeden Zahlenwerth des n:

$$h_n = H_n\, p_n;\quad k_n = K_n\, q_n$$

setzen, so dass also unter den Summenzeichen:

$$H_m p_m = h_m;\quad K_m q_m = k_m$$

wird. Die Grenzgleichungen nehmen dadurch, nach einigen leichten Reductionen, folgende Form an:

$$[3.]\quad \begin{cases} (-1)^n\left[b^2 P_n''(a)-n^2\pi^2(1-\varkappa^2)P_n(a)\right]\dfrac{h_n}{p_n} \\ = 2\pi^2\rho^2 \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m \dfrac{[m^2a^2+n^2b^2(1-\varkappa^2)]\,[n^2a^2+m^2b^2(1-\varkappa^2)]}{(m^2b^2+n^2a^2)^2\pi^4-a^4b^4\rho^4}\, k_m; \end{cases}$$

$$[4.]\quad \begin{cases} (-1)^n\left[a^2 Q_n''(b)-n^2\pi^2(1-\varkappa^2)Q_n(b)\right]\dfrac{k_n}{q_n} \\ = 2\pi^2\rho^2 \mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m \dfrac{[m^2b^2+n^2a^2(1-\varkappa^2)]\,[n^2b^2+m^2a^2(1-\varkappa^2)]}{(m^2a^2+n^2b^2)^2\pi^4-a^4b^4\rho^4}\, h_m. \end{cases}$$

Die beiden unendlichen Reihen, welche die zweiten Theile dieser Gleichungen bilden, lassen sich, wenn man die Constanten h_n, k_n gewissen Beschränkungen unterwirft, summiren. Erst nach Ausführung dieser Summation kann man die Function u als völlig bestimmt erachten.

§. 14. Cauchy beweist in einer seiner Abhandlungen über bestimmte Integrale folgenden Satz:

Bezeichnet $F(x)$ eine solche Function, dass der Ausdruck $F(x+y\sqrt{-1})$ bei allen Werthen des y für $x=\pm\infty$ und bei allen Werthen des x für $y=\pm\infty$ verschwindet

und für alle zwischenliegenden Werthe immer endlich und stetig bleibt; sind ferner $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ *die Wurzeln der Gleichung* $\frac{1}{F(x)} = 0$, *so nähert sich der Ausdruck:*

$$\varepsilon F(x_1+\varepsilon) + \varepsilon F(x_2+\varepsilon) + \varepsilon F(x_3+\varepsilon) + \ldots\ldots$$

worin ε *eine reelle Grösse bezeichnet, der Null, wenn* ε *sich der Null nähert.*

Dieses Satzes bedienen wir uns zur Ausführung obiger Summationen. Setzt man:

$$F(x) = \varphi(x). \frac{\cos \omega x}{\sin \pi x},$$

worin ω eine reelle Grösse bezeichnet, welche kleiner ist, als π, und $\varphi(x)$ eine rationale echt gebrochene Function, so zerfallen die Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ in zwei Classen. Die eine enthält alle Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, die andere die Wurzeln der Gleichung $\sin \pi x = 0$, also alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Der auf die Letzteren bezügliche Theil obiger Gleichung giebt folglich die Summe einer unendlichen Reihe, während die übrigen Wurzeln, für welche wir die Bezeichnung: $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ beibehalten wollen, im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Gliedern liefern. Das allgemeine Glied der unendlichen Reihe ist:

$$\lim. \left[\varphi(m+\varepsilon) \cos(m+\varepsilon)\omega. \frac{\varepsilon}{\sin(m+\varepsilon)\pi}\right].$$

Hierin nähert sich, wenn ε gegen Null convergirt, das Product $\varphi(m+\varepsilon) \cos(m+\varepsilon)\omega$ der Grenze: $\varphi(m) \cos m\omega$, und der Quotient: $\frac{\varepsilon}{\sin(m+\varepsilon)\pi}$ ist gleich: $\frac{(-1)^m \varepsilon}{\sin \pi \varepsilon}$, nähert sich also der Grenze $\frac{(-1)^m}{\pi}$. Jene Gleichung wird daher:

$$\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m \varphi(m) \cos m\omega = -\pi \mathbf{S} \lim \left[\varepsilon \varphi(x_s + \varepsilon) \frac{\cos \omega(x_s + \varepsilon)}{\sin \pi (x_s + \varepsilon)}\right].$$

wobei die Summe rechts sich auf den Index s bezieht und über alle Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ erstreckt.

Setzt man hierin:

$$\varphi(x) = \frac{1}{r^2 + x^2},$$

worin r eine beliebige Constante bezeichnet, so reduciren sich die Wurzeln x_s auf die beiden: $x_1 = r\sqrt{-1}$, $x_2 = -r\sqrt{-1}$. Für die erstere wird der Ausdruck unter dem Summenzeichen gleich:

$$\frac{\varepsilon}{r^2 + (r\sqrt{-1} + \varepsilon)^2} . \frac{\cos \omega (r\sqrt{-1} + \varepsilon)}{\sin \pi (r\sqrt{-1} + \varepsilon)}.$$

Hierin ist der erste Factor gleich: $\frac{\varepsilon}{2r\varepsilon\sqrt{-1} + \varepsilon^2}$, und nähert sich für $\varepsilon=0$ der Grenze $\frac{1}{2r\sqrt{-1}}$. Die beiden trigonometrischen Functionen werden resp. gleich:

$$\frac{e^{\omega r}+e^{-\omega r}}{2} \text{ und } -\frac{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}{2\sqrt{-1}},$$

also nähert sich der ganze Ausdruck der Grenze:

$$\frac{1}{2r}\cdot\frac{e^{\omega r}+e^{-\omega r}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}.$$

Denselben Werth liefert die zweite Wurzel, mithin wird:

$$\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m\frac{\cos m\omega}{m(m^2+r^2)}=\frac{\pi}{r}\cdot\frac{e^{\omega r}+e^{-\omega r}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $d\omega$ und integrirt nach ω von 0 bis ω, so erhält man schliesslich:

$$\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m\frac{\sin m\omega}{m(m^2+r^2)}=\frac{\pi}{r^2}\cdot\frac{e^{\omega r}-e^{-\omega r}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}.$$

§. 15. Dieser Formel wollen wir uns bedienen, um die beabsichtigte Summation auszuführen. Setzt man zu dem Zwecke $\omega=\frac{\pi\theta}{b}$ und bald $r=\frac{ba}{\pi}$, bald $r=\frac{ba'}{\pi}$, so erhält man, wenn man für a, a' links ihre Werthe einführt:

$$\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{\sin\frac{m\pi}{b}\theta}{(m^2a^2+n^2b^2)\pi^2+a^2b^2\rho^2}=\frac{1}{ba^2a}\cdot\frac{e^{\frac{a\theta}{ba}}-e^{-\frac{a\theta}{ba}}}{e-e^{-1}};$$

$$\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{\sin\frac{m\pi}{b}\theta}{(m^2a^2+n^2b^2)\pi^2-a^2b^2\rho^2}=\frac{1}{ba^2a'}\cdot\frac{e^{\frac{a'\theta}{ba'}}-e^{-\frac{a'\theta}{ba'}}}{e-e^{-1}}.$$

Wenn man beide Gleichungen von einander subtrahirt, so ergiebt sich:

$$(\Sigma.)\left\{\begin{aligned}&2a^4b^3\rho^2\,\mathbf{S}_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{\sin\frac{m\pi}{b}\theta}{(m^2a^2+n^2b^2)^2\pi^4-a^4b^4\rho^4}\\&=\frac{1}{ba^2a'}\cdot\frac{e^{\frac{a'\theta}{ba'}}-e^{-\frac{a'\theta}{ba'}}}{e-e^{-1}}-\frac{1}{ba^2a}\cdot\frac{e^{\frac{a\theta}{ba}}-e^{-\frac{a\theta}{ba}}}{e-e^{-1}}\end{aligned}\right.$$

Wenn man diese Gleichung viermal hintereinander nach θ differentiirt, darauf die Gleichung selbst mit: $n^4a^2b^2(1-\varkappa^2)$ ihre zweite Derivirte mit: $-\frac{n^2b^2}{\pi^2}[a^4(1-\varkappa^2)^2+b^4]$, ihre vierte Derivirte mit: $\frac{a^2b^6}{\pi^4}(1-\varkappa^2)$ multiplicirt und die Producte addirt, so erhält man eine Reihe, welche sich von der in der Grenzgleichung [4.] vorkommenden nur dadurch

unterscheidet, dass in dieser statt der Function $\frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{b} \theta$ die Constante h_m vorkommt. Man braucht daher, damit die Reihe in der Gleichung [4.] summirbar werde, nur einfach: $h_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{b} \theta$, also auch $h_m = \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{b} \theta$ zu setzen, wobei θ eine unbekannte Function von ρ bezeichnet. Wenn man in der Formel [Σ.], sowie in allen damit vorgenommenen Transformationen durchweg a mit b vertauscht und statt θ eine andere unbestimmte Function φ setzt, so erhält man auf dieselbe Art eine Formel, durch welche die in der Gleichung [3.] enthaltene Reihe summirt wird, sobald man in dieser $k_m = \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{a} \varphi$, also auch $k_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{a} \varphi$ setzt.

Führt man alle erforderlichen Rechnungen aus und setzt zur Abkürzung:

$$A_n = (-1)^n . \frac{nq_n \,[a^2\rho^2(1-\varkappa^2) - n^2\pi^2\varkappa^2]\,[n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,a^4 - (n^2\pi^2 + a^2\rho^2)\,b^4]}{\pi^2 a^6 b^2 \alpha\,[a^2 Q''_n(b) - n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,Q_n(b)]};$$

$$A'_n = (-1)^n . \frac{nq_n \,[a^2\rho^2(1+\varkappa^2) - n^2\pi^2\varkappa^2]\,[n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,a^4 - (n^2\pi^2 - a^2\rho^2)\,b^4]}{\pi^2 a^6 b^2 \alpha'\,[a^2 Q''_n(b) - n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,Q_n(b)]};$$

$$B_n = (-1)^n . \frac{np_n \,[b^2\rho^2(1-\varkappa^2) - n^2\pi^2\varkappa^2]\,[n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,b^4 - (n^2\pi^2 + b^2\rho^2)\,a^4]}{\pi^2 a^2 b^6 \beta\,[b^2 P''_n(a) - n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,P_n(a)]};$$

$$B'_n = (-1)^n . \frac{np_n \,[b^2\rho^2(1+\varkappa^2) - n^2\pi^2\varkappa^2]\,[n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,b^4 - (n^2\pi^2 - b^2\rho^2)\,a^4]}{\pi^2 a^2 b^6 \beta'\,[b^2 P''_n(a) - n^2\pi^2(1-\varkappa^2)\,P_n(a)]};$$

so nehmen die beiden Grenzgleichungen [3.] [4.] folgende einfache Form an:

$$[5.] \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{b} \theta &= B_n \frac{e^{\beta\varphi} - e^{-\beta\varphi}}{e^{a\beta} - e^{-a\beta}} + B'_n \frac{e^{\beta'\varphi} - e^{-\beta'\varphi}}{e^{a\beta'} - e^{-a\beta'}}; \\ \sin \frac{n\pi}{a} \varphi &= A_n \frac{e^{\alpha\theta} - e^{-\alpha\theta}}{e^{b\alpha} - e^{-b\alpha}} + A'_n \frac{e^{\alpha'\theta} - e^{-\alpha'\theta}}{e^{b\alpha'} - e^{-b\alpha'}}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen werden die unbestimmten Winkel θ, φ als Functionen des Parameters ρ bestimmt und die Function u, von welcher die Lösung unseres Problems abhängt, hat demnach alle erforderlichen Eigenschaften. Eine weitere Discussion der Gleichungen [5.] gestattet der Raum nicht, doch behalte ich mir vor, später darauf zurückzukommen.

KRUSEMARCK.

Uebersicht

der von Michaelis 1861 bis dahin 1862 absolvirten Lehrpensa.

Sexta, einjähriger Cursus.

28 St. w. Ordinarius Hermann.

1. **Religion** 3 St. Herrmann. Eine Auswahl Geschichten des A. u. N. T., das 1. Hauptstück des luth. Katechismus mit den dazu gehörigen Sprüchen; 12 Kirchenlieder gelernt. 2. **Deutsch** 4 St. Stumpf. Leseübungen, Orthographie, schriftliches Wiedergeben kleiner Erzählungen, Declamiren. 3. **Latein** 8 St. Wolsborn, später Backe. Die regelmäßige Formenlehre bis zur 2. Conjugation incl. Vocabeln. 4. **Rechnen** 5 St. Stumpf. Die vier Species in ungleich benannten Zahlen. 5. **Geographie** 1 St. Herrmann. Einleitende Begriffe, Europa im Allgemeinen, Deutschland, der preußische Staat, die Provinz Preußen. 6. **Geschichte** 2 St. Herrmann. Die Sagen des griechischen Alterthums. 7. 5 St. **technische Fertigkeiten.** (Siehe unten.)

Quinta, einjähriger Cursus.

31 St. w. Ordinarius Wolsborn, später Backe.

1. **Religion** 3 St. Stumpf. Die biblischen Geschichten A. u. N. T., das erste Hauptstück wiederholt, das zweite, besonders den 1. Artikel durchgenommen, das dritte Hauptstück gelernt, die in der Sexta gelernten Lieder wiederholt, 6 dazu gelernt. Das Kirchenjahr. 2. **Deutsch** 4 St. Herrmann. Lesen, Orthographie, der einfache Satz; Uebung im Wiedergeben kleiner Erzählungen, mündlich und schriftlich; Declamiren. 3. **Latein** 6 St. Wolsborn, später Backe. Vervollständigung der Formenlehre, die irregulären Verba, die conjugatio periphrastica, Vocabeln. 4. **Französisch** 5 St. Wolsborn, später Backe. Die Formenlehre bis zu den 4 Conjugationen mit Frage und Verneinung incl. 5. **Rechnen** 4 St. Herrmann. Die vier Species in Brüchen und ihre Anwendung im Dreisatz. 6. **Naturbeschreibung** 2 St. Röhl. Im Winter: Zoologie, die wichtigsten Gattungen und Arten der Vögel und Amphibien; im Sommer: Botanik, Untersuchung und Beschreibung einheimischer Pflanzen von einfacherem Blüthenbau. Die Grundzüge des Linné'ischen Systems. 7. **Geographie** 1 St. Stumpf. Europa eingehender betrachtet, der preußische Staat, Kartenzeichnen. 8. **Geschichte** 2 St. Stumpf. Die brandenburgische Geschichte bis zum großen Kurfürsten. 9. 4 St. **technische Fertigkeiten.**

Quarta, einjähriger Cursus.

32 St. w. Ordinarius Krusemarck.

1. **Religion** 2 St. Wolsborn, später Backe. Das 2. u. 3. Hauptstück durchgenommen, die beiden letzten gelernt; biblische Geschichten wiederholt und ergänzt. Die früher gelernten Lieder repetirt, acht neue hinzu gelernt. 2. **Deutsch** 3 St. Wolsborn, später Backe. Uebung im Lesen; eingehende sachliche und sprachliche Analyse des Gelesenen; Orthographie, Aufsätze, Declamiren. 3. **Latein** 6 St. Lentz. Die Verba anomala und defectiva, die wichtigsten syntactischen Verhältnisse mündlich und schriftlich, Vocabeln; Lectüre des Aurelius Victor, Cap. 1—12 und 75—86. 4. **Französisch** 5 St. Cuno. Einübung der regelmäßigen und gebräuchlichsten unregelmäßigen Conjugationen. 5. **Mathematik** 6 St. Krusemarck. 2 St. Rechnen: Proportions-, Zins-, Gesellschafts-Rechnung, Tara- und Disconto-Rechnung. 2 St. Arithmetik: die vier Species mit Buchstaben. 2 St. Geometrie: Planimetrie bis zu den leichtesten Sätzen vom Kreise. 6. **Naturbeschreibung** 2 St. Röhl. Im Winter: Zoologie, Beschreibung der Säugethiere und Amphibien; im Sommer: Botanik, die Klassen des Linnéischen Systems, einheimische Pflanzen untersucht und bestimmt; die Ordnungen des Systems. 7. **Geographie** 2 St. Cuno. Die ersten Elemente der mathematischen Geographie; die außereuropäischen Erdtheile. 8. **Geschichte** 2 St. Cuno. Die brandenburgisch-preußische Geschichte bis zum Wiener Congreß. 9. 4 St. **technische Fertigkeiten.**

Tertia, einjähriger Cursus.

32 St. w. Ordinarius Marburg.

1. **Religion** 2 St. Der Direktor. Die fünf Hauptstücke, verweilender die beiden letzten; Bibelkunde, Lectüre des Matthäus bis zum 16. Cap.; Wiederholung der bis dahin erlernten Kirchenlieder, sieben hinzugelernt. 2. **Deutsch** 3 St. Cuno. Lectüre ausgewählter Dichtungen und prosaischer Lesestücke, Anfangsgründe der Metrik, Satzlehre, Uebung im freien Vortrage, Declamiren, Aufsätze. 3. **Latein** 5 St. Lentz. Im Cornelius Nepos gelesen: Conon, Iphicrates, Chabrias, Timotheus, Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus, Phocion, praefatio. Die syntaxis casuum schriftlich und mündlich eingeübt, die Formenlehre repetirt, Vocabeln und Sprüchwörter gelernt. 4. **Französisch** 4 St. Marburg. Die Formenlehre durch mündliche und schriftliche Uebersetzung geeigneter Uebungsstücke befestigt; Exercitien. Gelesen: das erste und ein Theil des zweiten Buches von Voltaire's Charles XII. 5. **Englisch** 4 St. Marburg. Die Formenlehre ganz durchgenommen, Uebungsstücke schriftlich oder mündlich übersetzt, die Vocabeln dazu gelernt. Exercitien. 6. **Mathematik** 6 St. Krusemarck. 2 St. Rechnen: zusammengesetzte Proportions-, Zins- und Gesellschafts-Rechnung. 2 St. Algebra: Proportionen, Rechnung mit entgegengesetzten Größen, Decimal-Brüche, Lehre von den Potenzen mit ganzen Exponenten, Auflösung algebraischer Gleichungen 1. Grades. 2 St. Geometrie: Vollendung des planimetrischen Pensums bis zur Quadratur des Kreises incl. 7. **Naturbeschreibung** 2 St. Röhl. Im Winter Zoologie; ausführlichere Beschreibung der Vögel und Fische. Im Sommer Botanik; Wiederholung und Einübung der Classen und Ordnungen des Linnéischen Systems, fortgesetzte Untersuchung und Bestimmung einheimischer Pflanzen, Grundzüge des natürlichen Pflanzen-Systems. Gegen das Ende des Semesters Erklärung der wichtigsten Naturerscheinungen aus verschiedenen Gebieten der Physik. 8 **Geo-**

graphie 2 St. Cuno. Mathematische und physikalische Geographie, die außereuropäischen Erdtheile. 9. **Geschichte** 2 St. Cuno. Die wichtigsten Begebenheiten der alten Geschichte. 10. 2 St. **technische Fertigkeiten.**

Secunda, zweijähriger Cursus.

32 St. w. Ordinarius Röhl.

1. **Religion** 2 St. Der Direktor. Repetition der fünf Hauptstücke; Wiederholung der erlernten Kirchenlieder, acht hinzu gelernt. Lectüre des Evangeliums Lucä, Geschichte der christlichen Kirche. 2. **Deutsch** 3 St. Lentz. Gelesen wurde von Schiller Wallenstein's Tod, von Göthe Egmont. Declamiren, Controle der Privat-Lectüre; monatlich ein Aufsatz; die Themata: 1) der Segen der Armuth, 2) der Segen des Reichthums, 3) die Folgen der Unordnung, 4) die Handlung in den beiden ersten Akten in Wallensteins Tod. 5) welche Vorzüge scheinen die Thiere vor den Menschen zu haben? 6) die Geselligkeit 7) die Einsamkeit, 8) der Charakter Buttlers, 9) die Dampfkraft, 10) Ende gut, Alles gut, 11) Bericht über die Sommerferien, 12) Jeder ist seines Glückes Schmid, 13) das Wasser. — 3. **Latein** 4 St. Lentz. 2 St. Syntax, — die Lehre von den temporibus und modis; wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 2 St. Der Direktor. Caesar de bello gallico. Libr. VII. von Cap. 24 bis 90. Libr. I. Cap. 1 bis 20. 4. **Französisch** 4 St. Marburg. Die Syntax durch mündliches und schriftliches Uebersetzen bezüglicher Uebungsstücke befestigt, abwechselnd wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Gelesen: Histoire de Napoléon par Ségur Libr. I. bis IV. Cap. 3. 5. **Englisch** 3 St. Marburg. Wiederholung des Pensums der Tertia, Syntax, mündliches Uebersetzen ins Englische, verbunden mit Vocabellernen, Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Gelesen wurde: Tales of the Alhambra by Washington Irving, The Journey, Government of the Alhambra. Interior of the Alhambra, the Tower of Comares, Reflections on the Moslem Domination in Spain, the Household, the Truant, the Author's Chamber. 6. **Mathematik** 5 St. Krusemarck. 3 St. Algebra: Rechnung mit gebrochenen Potenzen; Logarithmen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Progressionen, Gleichungen ersten und zweiten Grades; 2 St. Geometrie, ebene Trigonometrie und algebraische Geometrie. 7. **Naturbeschreibung** 2 St. Röhl. Im Winter Anthropologie; im Sommer specielle Botanik mit Berücksichtigung des natürlichen und Linné'ischen Systems; gegen das Ende des Schuljahres wiederholende Uebersicht über das ganze Gebiet der Naturbeschreibung. 8. **Physik** 2 St. Röhl. Nach Beendigung der Electricitätslehre wurden die mechanischen Erscheinungen flüssiger Körper, die Lehre vom Magnetismus und die allgemeinen Eigenschaften der Körper durchgenommen und durch Experimente veranschaulicht. 9. **Chemie** 2 St. Röhl. Nach einer Einleitung über die chemischen Eigenschaften der Körper überhaupt, wurden die Metalloide und ihre wichtigsten Verbindungen unter einander behandelt und durch vielfache Versuche zur Anschauung gebracht. 10. **Geographie** 1 St. Cuno. Europa. 11. **Geschichte** 2 St. Cuno. Alte Geschichte bis zur Schlacht bei Actium. 12. 2 St. **technische Fertigkeiten.**

Prima, zweijähriger Cursus.

32 Stunden w. Ordinarius Lentz.

1. **Religion** 2 St. Der Direktor. Glaubenslehre, die augsburgische Confession, die Unterscheidungslehren, Wiederholung der Geschichte der Reformation. 2. **Deutsch** 3 St.

Der Direktor. Lectüre: Hermann und Dorothea von Göthe, die Jungfrau von Orleans von Schiller. Uebungen im Definiren, Disponiren; Synonyma. 12 Aufsätze. [Themata: 1) das Leben ist kein Traum; 2) Ueber die Entstehung der Klöster; 3) Was nützt das Studium der Weltgeschichte? 4) was gehört zu einem guten Vortrage? 5) was ist von dem Ausspruche zu halten: man lebt ja nur einmal; 6) Thorheit und Stolz wachsen auf Einem Holz; 7) willst du, daß wir mit hinein in das Haus dich bauen, laß es dir gefallen, Stein, daß wir dich behauen; 8) Zeit, Ebbe und Fluth warten auf Niemand; 9) über die vernünftige Unzufriedenheit mit uns selbst; 10) was findet der Mensch auf Erden, ohne es zu suchen? 11) über die Hindernisse der Selbsterkenntniß; 12) die Zukunft ist für den Menschen nicht so dunkel, wie Viele glauben.] 3. **Latein** 3 St. Lenz. Lectüre: Ovid's Metamorphosen, Libr. V. bis VII., Livius libr. XXI. und XXII. 4. **Französisch** 4 St. Marburg. Repetition der Syntax, mündliches Uebersetzen ins Französische, alle 14 Tage ein Exercitium oder Aufsatz; Extemporalia. Gelesen aus Herrig's La France Littéraire: die Abschnitte von Fénelon, Voltaire, Buffon, J. J. Rousseau, Bernardin de St. Pierre, Diderot, Le Sage, Villemain. An die Lectüre knüpften sich Uebungen in der Conversation. 5. **Englisch** 3 St. Marburg. Die Syntax; mündliches Uebersetzen ins Englische, alle 14 Tage ein Exercitium oder Aufsatz; Extemporalia. Gelesen aus Herrig's Britisch Classical Authors die Abschnitte von Chambers, Erskine, Sheridan, Lamb und zum Theil Byron. An die Lectüre knüpften sich Uebungen in der Conversation. 6. **Mathematik** 5 St. Krusemarck. 3 St. Algebra: Wiederholung der Lehre von den Reihen; litterelle Gleichungen dritten und vierten Grades; numerische Gleichungen. 2 St. Geometrie: Sphärische Trigonometrie; Wiederholung der Stereometrie und der Lehre von den Kegelschnitten; Analytische Geometrie. 7. **Physik** 3 St. Röhl. Die Lehre vom Lichte wurde zu Ende geführt, die Lehre von der Wärme durchgenommen und durch Versuche erläutert; schließlich einiges aus der Mechanik wiederholt und verschiedene Uebungsaufgaben gelöst. 8. **Chemie** 3 St. Röhl. Die wichtigsten Abschnitte aus der organischen Chemie wurden behandelt und möglichst durch Experimente verdeutlicht; darauf die Leichtmetalle wiederholt. 9. **Geographie** 1 St. Cuno. Wiederholung des ganzen geographischen Cursus und Erweiterung desselben. 10. **Geschichte** 2 St. Cuno. Neuere Geschichte; Wiederholung des ganzen Geschichtskursus.

Technische Fertigkeiten.

1. **Schreiben.** 7 St. w. Laury. Sexta, Quinta und Quarta. Die deutsche und englische Currentschrift nach Herzsprung, Uebungen im Taktschreiben.

2. **Zeichnen.** Sexta 2 St. w. Laury. Nach quadratförmigen Körpern und kleinen Vorzeichnungen mit einfachen Figuren. Quinta 2 St. Kleine Landschaften und Köpfe im Umriß. Quarta 2 St. Landschaften und menschliche Körpertheile im Umriß mit Schattirung. Tertia 2 St. Projections-Zeichnen und Studien-Köpfe nach Julien. Secunda 2 und Prima 3 St. Schatten-Construction und Perspective vorgetragen und an Natur-Gegenständen erläutert.

3. **Singen.** Bölkerling. Die gesangfähigen Schüler von Prima bis Sexta sind in 3 Klassen getheilt. Jede Klasse 2 St. w. Die 3. Klasse übte im 1. Semester einstimmige Lieder und Choräle nach dem Gehör; im 2. Semester trat hinzu: Kenntniß der

Noten, Intervallenlehre, Taktarten, Durtonleiter, Uebung im Treffen. Die 2. Klasse lernte die Molltonleiter kennen, übte zweistimmige Lieder, Chöre der Liturgie und Choräle. Die erste Klasse sang aus Erk's und Greef's Liedersammlungen vierstimmige Lieder, sowie die liturgischen Responsorien.

4. **Der Unterricht im Turnen** hat in dem verwichenen Sommer zweimal wöchentlich an den schulfreien Nachmittagen unter der Leitung des Lehrers Krusemarck regelmäßig stattgefunden.

Von den beiden Vorbereitungs-Klassen hat die untere wöchentlich 22 Stunden, nämlich 4 Religions-, 6 Deutsche-, 6 Rechnen- und 6 Schreibestunden; — die obere 26 Stunden, nämlich 4 Religions-, 10 Deutsche-, 6 Rechnen- und 6 Schreibestunden.

Verordnungen der vorgesetzten Behörden,

welche der Realschule im Laufe des verflossenen Schul-Jahres zugegangen sind.

1. Von der Königl. Regierung — Abschrift eines Ministerial-Erlasses vom 14. Dezbr. 1861, worin daran erinnert wird, daß der Stoff zu den wissenschaftlichen Abhandlungen in dem Programm vorzugsweise aus den der Realschule eigenthümlichen Unterrichts-Gebieten zu entnehmen sei.
2. Vom Patron der Schule unter dem 22. Dezbr. 1861. — Abschrift des Circular-Rescriptes der Königl. Ministerien des Innern und der Finanzen, betreffend die Bestreitung der Unterhaltungskosten in den Dienstwohnungen der Beamten.
3. Von der Königl. Regierung unter dem 23. Dezember 1861. — Abschrift einer Verfügung an den Patron der Schule, worin die Rangordnung der Lehrer der Realschule bestimmt wird.
4. Von der Königl. Regierung unter dem 31. Januar 1862. — Die Verhandlungen über die zu Michaelis 1861 an der Realschule stattgehabte Abiturienten-Prüfung nebst Abschrift des Urtheils der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission über den Ausfall dieser Prüfung.
5. Von der Königl. Regierung unter dem 23. Juni 1862. — Abschrift eines Ministerial-Erlasses, worin auf die von dem Gymnasial-Direktor Dr. Göbel herausgegebene Sammlung französischer Werke, und im Besondern auf die Histoire de Fréderic le Grand par Camille Pagange aufmerksam gemacht wird.
6. Von der Königl. Regierung unter dem 18. Juli 1862. — Die Aufforderung, zur Mittheilung an das Königl. Friedrichs-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin, an die Realschule zu Wittstock und an die höhere Lehranstalt zu Spremberg, welche dem Verbande der höheren Schulen zum Behufe des Programm-Austausches beigetreten sind, jährlich drei Exemplare mehr als bisher an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium einzusenden.
7. Von der Königl. Regierung unter dem 7. August cr. — Abschrift eines Ministerial-Erlasses vom 29. Juli cr., in Folge dessen der Direktor aufgefordert wird, sich unter Berücksichtigung der principiellen Aufgabe der höhern Schulen darüber zu äußern, ob es zweckmäßig und ausführbar sei, den Unterricht in der Stenographie in dergleichen Anstalten einzuführen.

8. Von der Königl. Regierung unter dem 13. August cr. — Abschrift einer Mittheilung an den Magistrat des Inhaltes, daß das Königl. Provinzial-Schul-Collegium die Erhebung der hiesigen Realschule in die erste Ordnung derartiger Anstalten bei dem Herrn Minister der geistlichen etc. Angelegenheiten unter dem 9. August beantragt habe.
9. Von der Königl. Regierung unter dem 2. September cr. — Abschrift eines Schreibens des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums, worin dasselbe auf Grund eines Antrages der Königl. Universitäts-Bibliothek zu Königsberg die Königl. Regierung ersucht, die Directoren zu Culm und Graudenz anzuweisen, von jetzt ab jährlich 2 Programm-Exemplare mehr als bisher und zwar für die Königl. Bibliothek einzusenden.
10. Von der Königl. Regierung vom 15. September cr. — Die Aufforderung für die höhere Bürgerschule zu Lauenburg, die dem Verbande Behufs des Programmen-Austausches beigetreten, von jetzt ab ein Exemplar mehr als bis dahin an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium zu senden.

Chronik der Realschule.

Der nun zurückgelegte Jahres-Cursus nahm am 21. October v. J. seinen Anfang; der Unterricht im Sommer-Semester begann am 24. April.

Der Gesundheitszustand der Lehrer und Schüler war im Ganzen sehr günstig. Unter den Lehrern kamen nur vier Krankheitsfälle vor, von denen der schwerste eine viertägige Vertretung erforderlich machte. Auch sind epidemische Krankheiten, dergl. sonst meist im Spätherbst den Schulbesuch zu beeinträchtigen pflegen, in dem verwichenen Schuljahre nicht vorgekommen. Doch ist das Jahr nicht geschieden, ohne auch aus dem Bereiche der Schule Opfer zu fordern. Der Schüler der obern Klasse der Vorschule, Oswald Schilling, 8 Jahr alt, Sohn des Kreis-Gerichts-Secretairs Schilling hierselbst, erlag im Dezember einem Scharlachfieber; der Sextaner Arthur Hamann, Sohn des Kaufmannes Hamann hierselbst, starb, 10 Jahr alt, nach einer Gehirnquetschung, die er sich am 28. Juli cr. an einer Hexel-Maschine zugezogen hatte. — Auch von ihren Lehrern wurde ihr früher Hintritt betrauert, denn beide Knaben zeigten neben aufkeimenden Anlagen Lernbegier und Willigkeit zu allem Guten.

Am 22. März cr. betheiligte sich die Realschule mit sämmtlichen evangelischen Schulen der Stadt an dem zur festlichen Geburtstagsfeier Sr. Majestät des Königs veranstalteten Gottesdienste.

Die Michaelis-Ferien nahmen mit Rücksicht auf die auf den 18. October festgesetzte Krönung Sr. Majestät des Königs statt am 2., am 7. October ihren Anfang und dauerten um die von Vielen gewünschte Theilnahme an diesem hohen und seltenen patriotischen Feste zu ermöglichen, diesmal ausnahmsweise bis zum 21. Oktober. Die Weihnachtsferien fielen in die Tage vom 19. Dezember bis zum 3. Januar; die Osternferien in die Tage vom 10. bis zum 24 April; die Pfingstferien dauerten vom 7. bis zum 12. Juni; die Sommerferien endlich vom 10. Juli bis zum 7. August. Außerdem fiel der Unterricht aus am Krönungstage den 18. Januar, am Geburtstage Sr. Majestät des Königs und an den ersten Tagen der vier hier stattfindenden Jahrmärkte.

Nach der in der öffentlichen Prüfung am 4. October stattgehabten feierlichen Entlassung der Abiturienten Dahm und Wark wurde dem letztern bei der Austheilung der Cen-

furen an die Zöglinge der Realschule am 5. October eine ihm von der Lehrer-Conferenz zuerkannte Prämie von 25 Thlrn. aus der Schelske-Stiftung übergeben.

In den Tagen vom 5. bis zum 8. Februar incl. revidirte im Auftrage des Herrn Unterrichts-Ministers der Herr Provinzial-Schulrath Schrader mit dem Herrn Regierungs-Rathe Conditt die Realschule, Behufs der über die Erhebung derselben in die erste Ordnung zu treffenden Entscheidung.

Am 27. Mai cr. beehrten der Herr Ober-Regierungs-Rath von Grohnefeld und der Herr Regierungs-Rath Conditt die Anstalt mit einem Besuche und wohnten dem Unterrichte in mehreren Klassen bei.

Der im Mai 1861 als Hülfslehrer an der Realschule angestellte Predigtamts-Candidat Wolsborn verließ diese seine hiesige Stellung, nachdem er im Mai cr. in Elbing zum Prediger gewählt worden war, beim Beginn der diesjährigen Sommerferien. Er hat als Lehrer und Pädagog den von ihm bei seiner Anstellung mit Grund gehegten guten Erwartungen vollständig entsprochen und dieselbe sorgliche Gewissenhaftigkeit in der Wahrnehmung seiner Dienstobliegenheiten hier in jeder Hinsicht bewiesen, die ihm schon aus seinen frühern amtlichen Verhältnissen nachgerühmt wurde. Hingebende Liebe zu seinem Berufe ließ ihn denselben mit der Freudigkeit ausrichten, der der Segen von oben nie fehlt. Möge ihm auch auf dem neuen Arbeitsfelde, wohin er jetzt berufen worden, unter Gottes Beistand die Aussaat wohlgelingen und die Erndte reich gesegnet sein. Seine Unterrichtsstunden übernahm stellvertretend bis zur Besetzung der Stelle der Rectorats-Candidat Backe aus Königsberg i/Pr.

Uebersicht

der für jeden Unterrichts-Gegenstand bestimmten Lehrstunden.

Fächer	Classen und Stunden.						
	VI.	V.	IV.	III.	II.	I.	Summa
Religion	3	3	2	2	2	2	14
Deutsch	4	4	3	3	3	3	20
Latein	8	6	6	5	4	3	32
Französisch		5	5	4	4	4	22
Englisch				4	3	3	10
Geographie u. Geschichte	3	3	4	4	3	3	20
Naturwissenschaft		2	2	2	6	6	18
Mathematik u. Rechnen	5	4	6	6	5	5	31
Schreiben	3	2	2				7
Zeichnen	2	2	2	2	2	3	13
	28	31	32	32	32	32	187
Singen	in den drei Singklassen, 6 St. w. außer der Schulzeit.						

Vertheilung der Stunden unter die Schüler.

No.	Lehrer.	Ord.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
1	Direktor Jacobi		2 Religion. 3 Deutsch.	2 Religion. 2 Latein.	2 Religion.				11
2	Oberlehrer Dr. Lentz	I.	3 Latein.	3 Deutsch. 2 Latein.	5 Latein.	6 Latein.			19
3	Oberlehrer Röhl	II.	6 Naturwissenschaft	6 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft		18
4	Ordentlicher Lehrer Marburg	III.	4 Franz. 3 Engl.	4 Franz. 3 Engl.	4 Franz. 4 Engl.				22
5	Ordentlicher Lehrer Krusemarck	IV.	5 Mathematik.	5 Mathematik.	6 Mathematik.	6 Mathematik.			22
6	Ordentlicher Lehrer Cuno		3 Gescht. und Geogr.	3 Gescht. und Geogr.	4 Gescht. und Geogr. 3 Deutsch.	4 Gescht. und Geogr. 5 Franz.			22
7	Wissenschaftl. Hülfslehrer Wolsborn später Backe.	V.				2 Religion. 3 Deutsch.	6 Latein. 5 Franz.	8 Latein.	24
8	Ordentlicher Lehrer Herrmann	VI.					4 Deutsch. 4 Rechnen.	3 Religion. 3 Gescht. und Geogr.	14
9	Lehrer Stumpf						3 Religion. 3 Gescht. und Geogr.	4 Deutsch. 5 Rechnen.	15
10	Zeichnen- und Schreiblehrer Laury		3 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen. 2 Schreib.	2 Zeichnen. 2 Schreib.	2 Zeichnen. 3 Schreib.	20
11	Gesanglehrer Völkersing		6 Stunden Gesangunterricht außer der Schulzeit.						

Summa 187

Der Lehrer der 1. Vorbereitungskl. Stumpf	In der 1. Vorbereitungsklasse ertheilen: Stumpf 10 St., Herrmann 10 St., Laury 6 St.	26
Der Lehrer der 2. Vorbereitungskl. Völkersing		22

Summa 48

Uebersicht
der Frequenz der Realschule.

Classen.	Am Anfang des Cursus.	Aufgenommen.	Abgegangen.	Schlußzahl.
Prima	1	1	—	2
Secunda	14	—	3	11
Tertia	31	4	9	26
Quarta	43	3	7	39
Quinta	50	3	2	51
Sexta	47	9	8	48
	186	20	29	177

der Vorschule.

Obere Klasse	30	41	8	63
Untere Klasse	12	31	19	24
	42	72	27	87

In der von dem Königl. Commissarius Herrn Regierungs-Rath Conditt auf den 20. September anberaumten und an diesem Tage abgehaltenen Abiturienten-Prüfung erhielt der Primaner

Paul Schilke,

Sohn des Gutsbesitzers Schilke in Ramutken bei Graudenz, 19 Jahr alt, evangelisch, 9 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, das Zeugniß der Reife mit dem Prädicate „genügend bestanden." Er beabsichtigt, sich der Landwirthschaft zu widmen.

Die bei der schriftlichen Prüfung bearbeiteten Themata und Aufgaben:

1. **Im Deutschen:** Der Mensch ist meistens selbst sein ärgster Feind.
2. **Im Französischen:** Hannibal en Italie.
3. **Im Englischen:** Ein Scriptum.
4. **In der Mathematik:** — a. **In der Algebra:** Eine Forst wird gegenwärtig auf 41,700 Klafter geschätzt und man hat berechnet, daß, wenn dieselbe geschont wird, 100 Klafter sich jährlich um 3½ Klafter vermehren. Wie groß wird der Bestand nach 32 Jahren sein,

wenn jährlich 125 Klafter geschlagen werden. b. **In der Planimetrie:** Es ist ein Kreis gegeben; man soll einen andern Kreis construiren, welcher jenen von innen berührt und eben so groß ist, wie das sichelförmige Stück, welches zwischen den Peripherien beider liegt. c. **In der Trigonometrie:** Vier Punkte A B C D liegen nicht in gerader Linie; ein fünfter Punkt E kann von jedem der vier erstern aus gesehen werden und man hat durch Messung gefunden:

$$AB = 537',47;\ CD = 382',54;$$
$$\angle BAE = 51^\circ 27'30'';\ \angle ABE = 47^\circ 32'10'';$$
$$\angle DCE = 108^\circ 14'20'';\ \angle CDE = 43^\circ 10'40'';$$
$$\angle AED = 149^\circ 37'50''.$$

Wie weit ist C von B entfernt? — d. **In der Stereometrie:** Es sind drei schiefe Kegel von gleichem Grundkreise, aber ungleicher Höhe angegeben; man soll ein dreikantiges, schief abgeschnittenes Prisma finden, dessen Volumen gleich ist der Summe der Volumina der drei Kegel.

5. **In der Mechanik, Physik und Chemie:** a. **In der Mechanik.** Einer Kraft A = 84 Pf. soll durch 2 andere Kräfte B und C, deren Richtung mit der Richtung der Kraft A beziehungsweise Winkel von 138° 12′ und 154° 36′ einschließen, das Gleichgewicht gehalten werden. Wie groß müssen die beiden Kräfte genommen werden. b. **In der Wärmelehre.** 1750 Gramme Bleispäne, deren specifische Wärme = 0,0293 ist, sind in ein kupfernes Gefäß von 60 Grammen, dessen specifische Wärme = 0,0949 ist, gethan, bis 300° C erwärmt und dann in ein Lavoisier'sches Calorimeter gebracht; wie viel Gramme Eis werden dadurch geschmolzen werden? c. **In der Chemie.** Wie viel Schwefelsäurehydrat von 1,84 specifischem Gewicht müßte man beim Verbrennen von 100 Centner Schwefelkies und wie viel krystallisirten Eisenvitriol aus dem Rückstande erhalten, wenn der Schwefelkies völlig rein wäre und wenn kein Verlust stattfände?

Die Lehrmittel.

Für die Bibliothek sind im verwichenen Jahre nur einige kleinere Schriften: als Strack Räthsel-Aufgaben, die Befreiungskriege von Würdig, Declamations-Uebungen von Wendt, der Wegweiser für evangelische Volksschullehrer von Bock, Kopf- und Tafelrechnen von Koch; dann die Fortsetzungen von Weber's Weltgeschichte IV, 1, Giesebrecht deutscher Kaiserzeit III, 1, Thiers Geschichte des Consulates und des Kaiserreiches XXI, sowie der naturwissenschaftlichen Werke: Kolb, Atlas Lief. 6, Gmelin Handbuch 59, 60, 61. Muspratt Chemie II Suppl. 2–4 — angeschafft worden.

Im Lehrer-Collegium wurden gelesen: Die Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Hollenberg ꝛc.; das pädagogische Archiv von Langbein, das Centralblatt für die Unterrichts-Verwaltung, Poggendorff's Annalen, das Schulblatt für die Provinz Brandenburg.

Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegio wurden der Schule die Programme der meisten preußischen Gymnasien und Realschulen zugefertigt.

An Geschenken erhielt die Bibliothek: 1. Von dem Buchhändler Herbig in Berlin — Manuel de la Litterature française du XVII., XVIII. et XIX. siècle von Plötz. 2. Von dem Buchdruckerei-Besitzer E. Gröning in Danzig — die gebräuchlichsten Choral-

Melodien für höhere und niedere Schulen. 3. Von der Verlags-Buchhandlung W. Nitzschke in Stuttgart — das orthographische Wörterbuch der deutschen Sprache für Schule und Haus von Dr. Ferd. Scholl. 4. Von der Verlags-Buchhandlung G. W. F. Müller zu Berlin — A. Böhme's Uebungsbuch im Rechnen, 6 Hefte. 5. Von Louis Ehlermann in Dresden — den evangelischen Liedersegen von Gellert bis zur neuesten Zeit von Dr. Ferd. Seinecke. 6. Von Dümmler's Verlags-Buchhandlung in Berlin — a. Grundriß der brandenburgisch-preußischen Geschichte in Verbindung mit der deutschen von F. Voigt; b. das lateinische Lesebuch von Gedicke, 24. Auflage, von Friedr. Hoffmann. 7. Von der Verlags-Buchhandlung Veit u. Comp. in Leipzig — a. Schlüssel zur englischen Elementar-Grammatik von Dr. L. Georg; b. desselben Verfassers Elementar-Grammatik der englischen Sprache mit stufenweise eingelegten Uebersetzungs-Aufgaben, Lesestücken und Sprachübungen. 8. Von der Verlags-Buchhandlung C. M. Schüller in Crefeld — die beschreibende und analytische Geometrie, als Leitfaden beim Unterrichte in höheren Lehranstalten von W. Mink. 9. Von der Verlags-Buchhandlung E. F. Steinacker in Leipzig — Aufgaben zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische, nebst Themen zu freien Stil-Uebungen oder Vorträgen von Dr. A. Gerth. 10. Von der Universitäts-Buchhandlung Ferd. Hirt in Breslau — a. die Schulgeographie, zehnte Bearbeitung des Leitfadens 2c. von E. v. Seydlitz; b. die kleine Ausgabe der zehnten Bearbeitung dieses Leitfadens; c. das deutsche Lesebuch von Auras u. Guerlich 1. Theil; d. kleine Schul-Naturgeschichte oder Schilling's Grundriß der Naturgeschichte, kleinere Ausgabe; e. deutsches Lesebuch für das mittlere Kindesalter von K. u. L. Seltzsam; f. die Elementar-Mathematik von L. Kambly. Von jedem der Werke a. bis f. 2 Exemplare.

10. Von dem Herrn Aktuarius Richard hierselbst — der praktische Schulmann, Archiv für Materialien zum Unterrichte für Real-, Bürger- und Volksschulen, 3 Bände, die Jahrgänge 1852, 53 u. 54.

Für diese uns zugegangenen willkommenen Gaben sage ich den wohlwollenden Gebern Namens der Schule hiermit den ergebensten Dank.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Dienstag, den 30. September 1862.

Vormittags von 8 Uhr ab.

Quarta: Geometrie Krusemarck.
Naturbeschreibung Röhl.
Tertia: Latein Lentz.
Geographie Cuno.
Secunda: Algebra Krusemark.
Französisch Marburg.
Prima: Deutsch Jacobi.
Englisch Marburg.

Nachmittags von 2 Uhr ab.

Die 2. Vorbereitungs-Klasse:
Lesen und Rechnen Völkerling.
Die 1. Vorbereitungs-Klasse:
Religion Herrmann.
Lesen Stumpf.
Sexta: Geschichte Herrmann.
Rechnen Stumpf.
Quinta: Latein } Backe.
Französisch }

Entlassung des Abiturienten.

Schluß-Gesang.

Mittwoch den 1. Oktober, Vormittags 9 Uhr erhalten die Schüler aller Klassen ihre Censuren. Unmittelbar darauf werden den Zöglingen der Schule, die sich im verwichenen Cursus durch Fleiß und gute Führung hervorgethan, die ihnen von der Lehrer-Conferenz zuerkannten Prämien aus der Schelske-Stiftung übergeben.

Der Unterricht im neuen Cursus beginnt den 9. Oktober Vormittags 8 Uhr.

Die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler findet am 8. Oktober Vormittags von 9 Uhr ab statt.

Graudenz, am 26. September 1862.

Jacobi,
Direktor.

Druckfehler:

Seite 8, Zeile 18 muss der Factor der eckigen Klammer $\frac{\partial \delta z}{\partial x}$, nicht $\frac{\partial \delta z}{\partial y}$ heissen.

Seite 8, Zeile 20 ist τ^2 statt ς^2 zu lesen.

Seite 12, Zeile 25 im ersten Gliede der Differentialgleichung (u.) lies $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ statt $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2}$.

Seite 15, Zeile 13 und 19 ist $-\infty$ statt $+\infty$ als untere Grenze an das Summenzeichen zu setzen.

Seite 28 in der Ueberschrift muss es heissen: Lehrer statt Schüler.